CHUYÊN ĐỀ

TÌM HIỂU THÊM MỘT SỐ ĐỊNH LÝ HÌNH HỌC (PHẦN I)

I- LỜI NÓI ĐẦU

_ Là một thành viên trên diendantoanhoc.net (VMF) và thường xuyên trao đổi thông tin trên đó, tôi gặp được một bài toán :

" Cho A là một điểm bất kỳ trên (O ; R) và AB, AC là hai dây của đường tròn này tiếp xúc với (I ; r) nằm trong (O ; R). Khi đó BC là tiếp tuyến của (I ; r) khi và chỉ khi OI = $\sqrt{R(R-2r)}$ *"*

_ Qua tìm hiểu thì biết được đây là Định lý Euler nổi tiếng. Từ đó tôi thấy rằng cần thiết có một tài liệu giới thiệu về một số định lý Hình học nhằm cung cấp thêm cho chúng ta một ít kiến thức để áp dụng các định lý này vào việc giải toán Hình học.

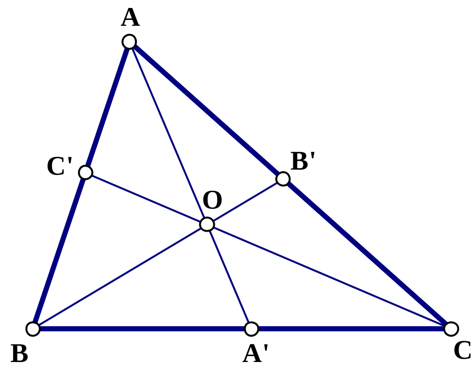
_ Trong bài viết có tham khảo thêm một phần (Điểm Toricelli, Định lý Carnot) trong bài giảng của Thầy Trần Nam Dũng (PTNK TPHCM). Xin cảm ơn Thầy và mong các bạn góp ý thêm về bài viết nhằm hoàn thiện hơn nữa.

II- CÁC ĐỊNH LÝ về chứng minh đồng quy – thẳng hàng :

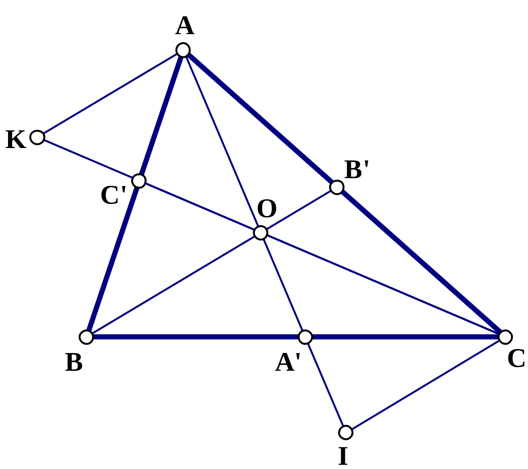
Đầu tiên xin giới thiệu hai định lý CEVA và MENELAUS được dùng trong việc chứng minh ba đường thẳng đồng quy và chứng minh ba điểm thẳng hàng. Việc chứng minh hai định lý này không khó nhưng khi áp dụng, ta giải được nhiều bài tập đặc sắc.

1- Định lý CEVA (*Giovanni Ceva*, 7/12/1647 – 15/6/1734, nhà toán học người Ý)

GT	ΔABC A' $\in$ BC (A' $\neq$ B, C) B' $\in$ AC (B' $\neq$ A, C) C' $\in$ AB (C' $\neq$ A, B)
KL	AA', BB', CC' đồng quy $\Leftrightarrow \frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1$



Chứng minh



Phần thuận

- Cho AA', BB', CC' cắt tại O
  Vẽ AK // BB' (K $\in$ CC') ; CI // BB' (I $\in$ AA')
- Xét ΔOAB, ta có OB // CI (BB' // CI) → $\frac{A'B}{A'C}=\frac{OB}{CI}$

  $\Delta AKC'$, ta có OB // AK (BB' // AK) → $\frac{C'A}{C'B}=\frac{AK}{OB}$

  ΔACI, ta có OB' // CI (BB' // CI) → $\frac{OA}{OI}=\frac{B'A}{B'C}$

  ΔOCI, ta có CI // AK → $\frac{OA}{OI}=\frac{AK}{CI}$
- Từ đó $\frac{B'A}{B'C}=\frac{AK}{CI}$ → $\frac{B'C}{B'A}=\frac{CI}{AK}$.
- Như vậy $\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'C}{B'A}\cdot\frac{C'A}{C'B}=\frac{OB}{CI}\cdot\frac{CI}{AK}\cdot\frac{AK}{OB}=1$

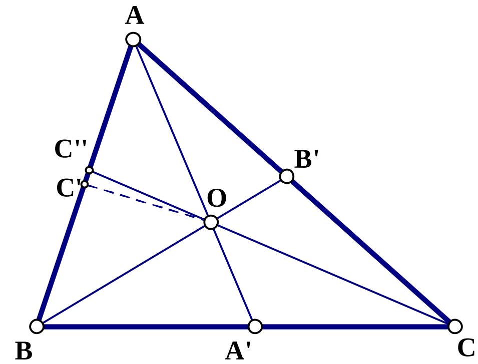
Phần đảo

- Giả sử có A', B', C' (*nằm trên các cạnh*) thỏa $\frac{A'B}{A'C}\cdot\frac{B'A}{B'C}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1$
- Gọi {O} = AA' $\cap$ BB' . Qua O, vẽ CC" với C'' $\in$ AB

- Tương tự phần thuận, ta c/m được $\dfrac{A'B}{A'C}\cdot\dfrac{B'A}{B'C}\cdot\dfrac{C''A}{C''B} = 1.$
- Từ đó $\dfrac{C'A}{C'B} = \dfrac{C''A}{C''B}$

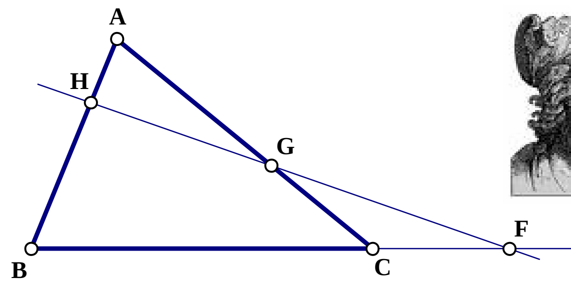
Vì C' và C'' đều n/g A và B nên C' ≡ C''

Như vậy AA', BB', CC' đồng quy tại O ■



2- Định lý MENELAUS (*Menelaus* , 70 – 130 SCN, nhà toán học người Ai Cập thời Alexandria)

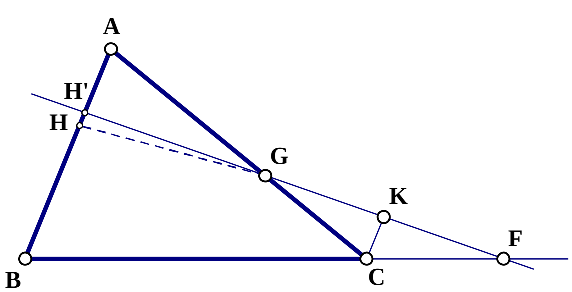
GT	ΔABC, H ∈ AB (H ≠ A, B) G ∈ AC (G ≠ A, C) F ∈ AB (F ≠ B, C)
KL	H, G, F thẳng hàng ⇔ $\dfrac{FB}{FC}\cdot\dfrac{GC}{GA}\cdot\dfrac{HA}{HB} = 1$



Chứng minh

Phần thuận

- Vẽ CK // AB (K ∈ HF)
- Xét ΔAHG, ta có AH // CK (CK // AB) nên $\dfrac{GC}{GA} = \dfrac{CK}{AH}$
- Xét ΔBFH, ta cũng có CK // BH (CK // AB) nên $\dfrac{FB}{FC} = \dfrac{BH}{CK}$
- Do đó $\dfrac{FB}{FC}\cdot\dfrac{GC}{GA}\cdot\dfrac{HA}{HB} = \dfrac{BH}{CK}\cdot\dfrac{CK}{AH}\cdot\dfrac{HA}{HB} = 1$



Phần đảo

Giả sử có H, G, F thỏa $\dfrac{FB}{FC}\cdot\dfrac{GC}{GA}\cdot\dfrac{HA}{HB} = 1$

Gọi {H'} = GF ∩ AB

Tương tự phần thuận, ta c/m được $\dfrac{FB}{FC}\cdot\dfrac{GC}{GA}\cdot\dfrac{H'A}{H'B} = 1$

Từ đó $\dfrac{H'A}{H'B} = \dfrac{HA}{HB}$

Vì H và H' đều n.g A và B nên H ≡ H'

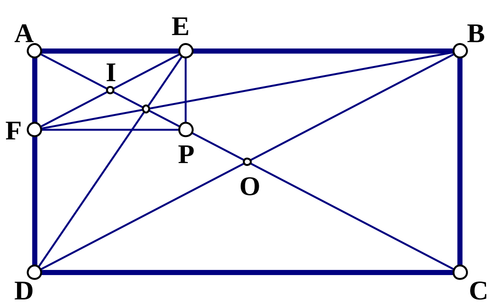
Như vậy H, G, F thẳng hàng ■

3- Bài tập mẫu - Tự luyện

BÀI 1 Cho hình chữ nhật ABCD. Từ P trên đường chéo AC dựng hình chữ nhật AEPF (E∈AB, F∈AD). Chứng minh BF và DE cắt nhau tại một điểm nằm trên AC.

Hd

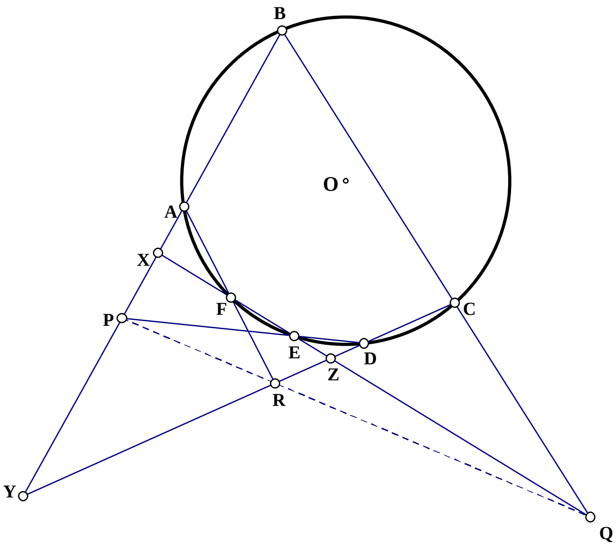
_ Thật ra thì bài tập này chứng minh không khó lắm, thậm chí dùng một kết quả trong SGK lớp 8, có thể suy ra được. (*EFDB là hình thang, FD và EB cắt nhau tại A. Khi đó đường thẳng qua A và giao điểm hai đường chéo sẽ đi qua trung điểm hai cạnh đáy*).



_ Tuy nhiên nếu áp dụng định lý CEVA cho ΔADB (*E, F, O là các điểm lần lượt thuộc các cạnh*), ta chứng minh dễ dàng ba đường AO, BF, DE đồng quy ■

<u>BÀI 2</u> Cho A, B, C, D, E, F là các điểm nằm trên một đường tròn (*có thể không xếp theo thứ tự như trên*). Gọi $\{P\}=AB\cap DE, \{Q\}=BC\cap EF, \{R\}=CD\cap FA$. Chứng minh rằng P, Q, R thẳng hàng.

<u>Hd</u>



<u>Gọi</u> $\{X\}=EF\cap AB,$ $\{Y\}=AB\cap CD,$ $\{Z\}=CD\cap EF.$

Áp dụng định lý Menelaus cho BC, DE, FA (*đối với ΔXYZ*), ta có:

$$\frac{QZ}{QX}.\frac{BX}{BY}.\frac{CY}{CZ}=\frac{PX}{PY}.\frac{DY}{DZ}.\frac{EZ}{EX}=\frac{RY}{RZ}.\frac{FZ}{FX}.\frac{AX}{AY}=1$$

(*3 tích giữa các tỉ số là 1 <u>nên</u> TÍCH của 3 tích này cũng là 1*)

Sắp xếp TÍCH các tích trên lại hợp lý, ta có :

$$\left(\frac{QZ}{QX}.\frac{PX}{PY}.\frac{RY}{RZ}\right)\left(\underbrace{\frac{CY.DY}{BY.AY}}_{1}.\underbrace{\frac{BX.AX}{EX.FX}}_{1}.\underbrace{\frac{EZ.FZ}{CZ.DZ}}_{1}\right)=1$$

<u>Do đó</u> $\frac{QZ}{QX}.\frac{PX}{PY}.\frac{RY}{RZ}=1$, theo định lý Menelaus ta được P, Q, R thẳng hàng : <u>*đpcm*</u> ! ■

<u>**MỘT SỐ BÀI TỰ LUYỆN**</u>

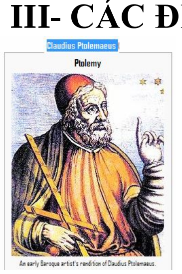
3.1 Qua các điểm A và D nằm trên đường tròn kẻ các đường tiếp tuyến, chúng cắt nhau tại điểm S. Trên cung AD lấy các điểm A và C. Các đường thẳng AC và BD cắt nhau tại điểm P, các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại điểm O. Chứng minh rằng đường thẳng PQ chứa điểm O.

3.2 Trên các cạnh của tam giác ABC về phía ngoài ta dựng các hình vuông. A_1, B_1, C_1, là trung điểm các cạnh của các hình vuông nằm đối nhau với các cạnh BC, CA, AB tương ứng. Chứng minh rằng các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

3.3 Điểm P nằm trên đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC, A_1, B_1, C_1 lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ P xuống BC, CA, AB. Chứng minh rằng A_1, B_1, C_1 thẳng hàng.

3.4 Trong tam giác vuông ABC kẻ đường cao CK từ đỉnh của góc vuông C, còn trong tam giác ACK kẻ đường phân giácCE. D là trung điểm của đoạn AC, F là giao điểm của các đường thẳng DE và CK. Chứng minh BF//CE.

III- CÁC ĐỊNH LÝ về Đường tròn ngoại tiếp – nội tiếp :

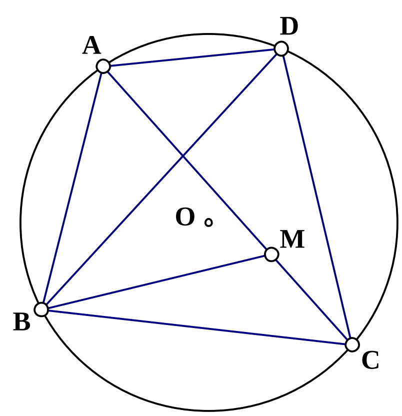


1- Định lý PTOLEMY (Claudius Ptolemy 100-170 SCN)

1.1 <u>Đẳng thức PTOLEMY</u>

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Khi đó $AC.BD=AB.CD+AD.BC$

<u>Chứng minh</u>



Lấy M thuộc đường chéo AC sao cho $\widehat{ABD}=\widehat{MBC}$

Khi đó xét ΔABD và ΔMBC có $\widehat{ABD}=\widehat{MBC}$, $\widehat{ADB}=\widehat{MCB}$

Nên ΔABD ∽ ΔMBC (g – g)

Do đó ta có : $\frac{AD}{BD}=\frac{MC}{BC}\Rightarrow AD.BC=BD.MC$ (1)

Lại có $\frac{BA}{BD}=\frac{BM}{BC}$ và $\widehat{ABM}=\widehat{DBC}$

Nên ΔABM ΔDBC (g – g)

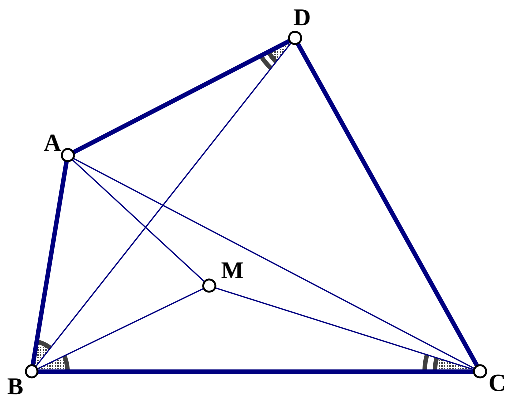
Suy ra $\frac{AB}{AM}=\frac{BD}{CD}$ hay $AB.CD=AM.BD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AD.BC+AB.CD=BD.MC+AM.BD=AC.BD$: *đpcm* ! ■

1.2 Bất đẳng thức PTOLEMY

Cho tứ giác ABCD. Khi đó $AC.BD\le AB.CD+AD.BC$

Chứng minh



Trong $\widehat{ABC}$ lấy điểm M sao cho $\widehat{ABD}=\widehat{MBC},\ \widehat{ADB}=\widehat{MCB}$

Chứng minh được $\Delta BAD \backsim \Delta BMC$

$\Rightarrow \frac{AD}{MC}=\frac{BD}{CB}\Rightarrow BD.CM=AD.CB$

Cũng từ kết luận trên suy ra: $\frac{AB}{BM}=\frac{BD}{BC},\ \widehat{ABM}=\widehat{DBC}$

$\Rightarrow \Delta ABM \backsim \Delta DBC(c-g-c)$

$\Rightarrow \frac{AB}{AM}=\frac{BD}{CD}\Rightarrow AB.DC=BD.AM$

Áp dụng bất đẳng thức trong tam giác và các điều trên ta có:

$AD.BC+AD.DC=BD(AM+CM)\ge BD.AC$: *đpcm* ! ■

1.3 Một nhận định cần lưu ý

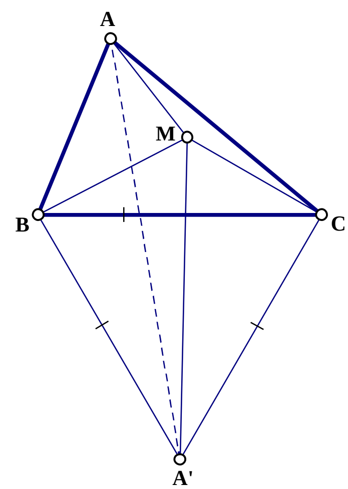
Bất đẳng thức Ptolemy là hệ quả của bất đẳng thức tam giác ?

(Trích lược theo ý kiến của Thầy Trần Nam Dũng - PTNK)

" *Ai cũng biết bất đẳng thức tam giác: Với A, B, C là ba điểm bất kỳ trên mặt phẳng, ta có AB + BC ≥ AC. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi A, B, C thẳng hàng và B nằm giữa A và C.*
Trong khi đó, bất đẳng thức Ptolemy khẳng định: Với 4 điểm A, B, C, D bất kỳ trên mặt phẳng, ta có AB.CD + AD.BC ≥ AC.BD
Rõ ràng, theo một quan điểm nào đó thì bất đẳng thức Ptolemy chính là mở rộng của bất đẳng thức tam giác "

1.4 Bất đẳng thức Ptolemy và các kết quả kinh điển

1.4.1 Điểm Toricelli



Bài toán *"Cho tam giác ABC bất kỳ. Hãy tìm điểm M trong mặt phẳng tam giác sao cho MA + MB + MC đạt giá trị nhỏ nhất".*

Điểm M tìm được được gọi là điểm Toricelli của tam giác ABC

_Trên cạnh BC, dựng ra phía ngoài tam giác đều BCA'. Áp dụng bất đẳng thức Ptolemy cho tứ giác MBA'C ta có

BM.CA' + CM.BA' ≥ BC.MA'

_Từ đó, do CA' = BA' = BC nên ta được

BM + CM ≥ MA'

_Như vậy AM + BM + CM ≥ MA + MA' ≥ AA'

_Tức là AM + BM + CM ≥ AA' (là hằng số)

Dấu bằng xảy ra ⇔ Tứ giác BMCA' nội tiếp và M nằm giữa A và A'

1.4.2 Định lý Carnot (Nicolas Léonard Sadi Carnot – 1796)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn (O ; R) và ngoại tiếp đường tròn (I ; r) Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ O tới các cạnh tam giác. Chứng minh rằng : $x+y+z=R+r$

Chứng minh.

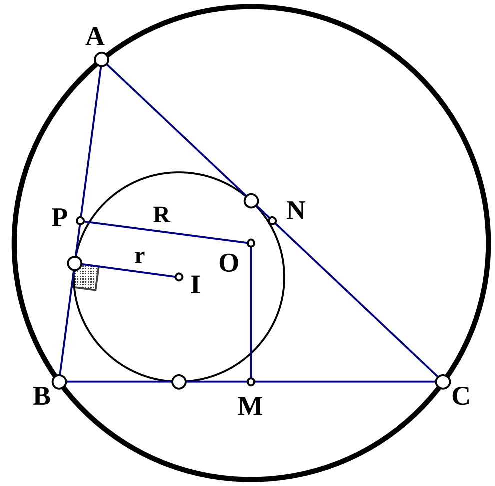
Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của BC,CA,AB.

Giả sử $x=OM,\ y=ON,\ z=OP,\ BC=a,\ CA=b,\ AB=c.$

Tứ giác OMBP nội tiếp, theo đẳng thức Ptolemy ta có:

$$OB.PM = OP.MB + OM.PB$$

Do đó: $R.\frac{b}{2} = z.\frac{a}{2} + x.\frac{c}{2}$ (1)



Tương tự ta cũng có : $\begin{cases} R.\frac{c}{2} = y.\frac{a}{2} + x.\frac{b}{2} & (2) \\ R.\frac{a}{2} = y.\frac{c}{2} + z.\frac{b}{2} & (3) \end{cases}$

Mặt khác:

$r\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right) = S_{ABC} = S_{OBC} + S_{OCA} + S_{OAB} =$

$= x.\frac{a}{2} + y.\frac{b}{2} + z.\frac{c}{2}$ (4)

Từ (1), (2), (3), (4) ta có:

$(R + r)\left(\frac{a+b+c}{2}\right) = (x + y + z)\left(\frac{a+b+c}{2}\right) \Rightarrow R + r = x + y + z :$ *đpcm* ! ■

(*Đây là một định lí khá quen thuộc và cách chứng minh khá đơn giản. Ứng dụng của định lí này như đã nói là dùng nhiều trong tính toán các đại lượng trong tam giác*)

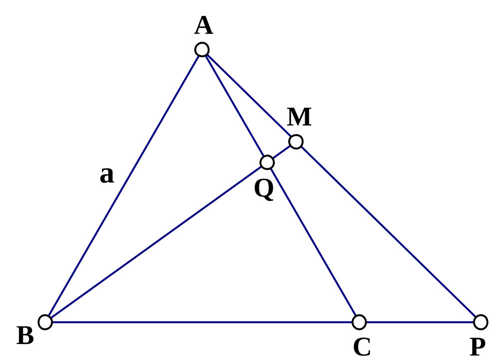
5. Ứng dụng của Định lý Ptolemy

Bài toán 1.

Cho tam giác đều ABC có các cạnh bằng a (a > 0). Trên AC lấy điểm Q di động, trên tia đối của tia CB lấy điểm P di động sao cho AQ.BP = a^2. Gọi M là giao điểm của BQ và AP. Chứng minh rằng $AM + MC = BM$.

Chứng minh.

Từ giả thiết $AQ.BP = a^2$ suy ra $\frac{AQ}{AB} = \frac{AB}{BP}$.



Xét ΔABQ và ΔBPA có: $\frac{AQ}{AB} = \frac{AB}{BP}$(gt) và $\widehat{BAQ} = \widehat{ABP}$

$\Rightarrow \Delta ABQ \backsim \Delta BPA$ (c – g – c) $\Rightarrow \widehat{ABQ} = \widehat{APB}$ (1)

Lại có $\widehat{ABQ} + \widehat{MBP} = 60^0$ (2)

Từ (1),(2) ta suy ra được :

$\widehat{BMP} = 180^0 - \widehat{MBP} - \widehat{MPB} = 120^0$

$\Rightarrow \widehat{AMB} = 180^0 - \widehat{BMP} = 180^0 - 120^0 = 60^0 = \widehat{ACB}$

$\Rightarrow$ tứ giác AMCB nội tiếp được đường tròn.

Áp dụng định lí Ptolemy cho tứ giác AMCB nội tiếp và giả thiết $AB = BC = CA$

Ta có $AB.MC + BC.AM = BM.AC \Rightarrow AM + MC = BM$: *đpcm* !

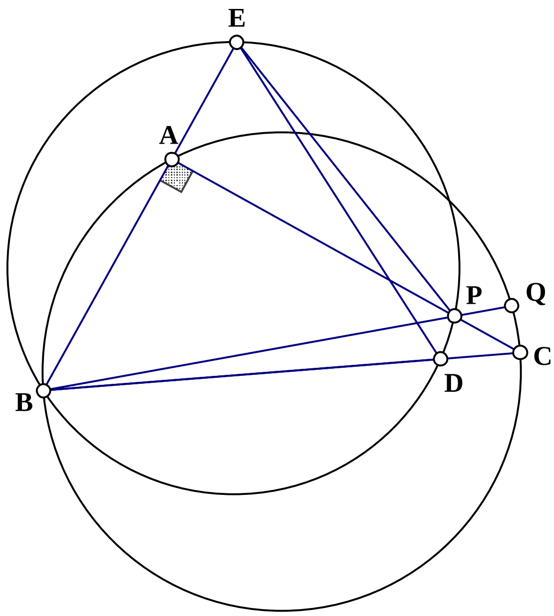
Bài toán 2.

Tam giác ABC vuông có BC > CA > AB. Gọi D là một điểm trên cạnh BC, E là một điểm trên cạnh AB kéo dài về phía điểm A sao cho BD = BE = CA. Gọi P là một điểm trên cạnh AC sao cho E, B, D, P nằm trên một đường tròn. Q là giao điểm thứ hai của BP với đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Chứng minh rằng $AQ + CQ = BP$.

Chứng minh.

Xét các tứ giác nội tiếp ABCQ và BEPD ta có: $\widehat{CAQ} = \widehat{CBQ} = \widehat{DEP}$

Mặt khác $\widehat{AQC} = 108^0 - \widehat{ABC} = \widehat{EPD}$



Xét ΔAQC và ΔEPD có:

$\widehat{AQC} = \widehat{EPD},\ \widehat{CAQ} = \widehat{DEP}$

$\Rightarrow \Delta AQC \backsim \Delta EPD$

$\Rightarrow \dfrac{AQ}{EP} = \dfrac{CA}{ED} \Rightarrow AQ.ED = EP.CA = EP.BD \quad (1)$

(do $AC = BD$)

$\dfrac{AC}{ED} = \dfrac{QC}{PD} \Rightarrow ED.QC = AC.PD = BE.PD \quad (2)$

(do $AC = BE$)

Áp dụng định lí Ptolemy cho tứ giác nội tiếp BEPD ta có: $EP.BD + BE.PD = ED.BP \quad (3)$

Từ(1), (2), (3) suy ra $AQ.ED + QC.ED = ED.BP$

$\Rightarrow AQ + QC = BP$: *đpcm* !

<u>Bài toán 3.</u>

Cho một tứ giác nội tiếp có các cạnh liên tiếp bằng a, b, c, d và các đường chéo bằng p, q.

Chứng minh rằng $pq \le \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$

<u>Chứng minh.</u>

Áp dụng định lí Ptolemy cho tứ giác nội tiếp thì $ac + bd = pq$

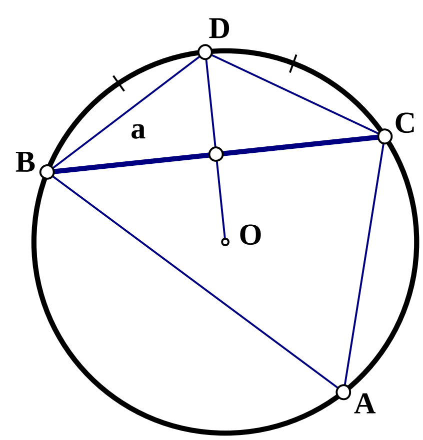
Vậy ta cần chứng minh $p^2q^2 = (ac+bd)^2 \le (a^2+b^2)(c^2+d^2)$

Bất đẳng thức này chính là một bất đẳng thức rất quen thuộc mà có lẽ ai cũng biết đó là BĐT Cauchy-Schwarz. Vậy bài toán được chứng minh.

Một lời giải đẹp và vô cùng gọn nhẹ cho một bài toán tưởng chừng như là khó. Ý tưởng ở đây là đưa bất đẳng thức cần chứng minh về một dạng đơn giản hơn và "đại số" hơn.
Thật thú vị là bất đẳng thức đó lại là BĐT Cauchy-Schwarz.

<u>Bài toán 4.</u>

Cho đường tròn (O) và BC là một dây cung khác đường kính của đường tròn. Tìm điểm A thuộc cung lớn BC sao cho $AB + AC$ lớn nhất.



<u>Chứng minh.</u>

Gọi D là điểm chính giữa cung nhỏ BC.

<u>Đặt</u> $DB = DC = a$ không đổi. Theo định lí Ptolemy ta có:

$$AD.BC = AB.DC + AC.BD = a(AB + AC) \Rightarrow AB + AC = \frac{BC}{a}.AD$$

<u>Do</u> BC và A không đổi nên $AB + AC$ lớn nhất
$\Leftrightarrow$ AD lớn nhất $\Leftrightarrow$ A là điểm đối xứng của D qua tâm O của đường tròn.

2- Định lý EULER (Leonhard Euler 1707-1783)

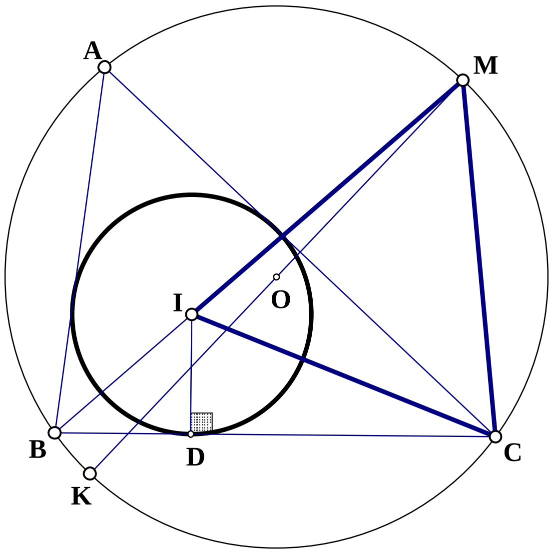
Ta trở lại với định lý đã đặt ra vấn đề cho bài viết này, cũng xin phân biệt định lý này với "Đường thẳng Euler" hay "Đường tròn Euler" :

> **" Cho A là một điểm bất kỳ trên (O ; R) và AB, AC là hai dây của đường tròn này tiếp xúc với (I ; r) nằm trong (O ; R). Khi đó BC là tiếp tuyến của (I ; r) khi và chỉ khi $OI = \sqrt{R(R-2r)}$ "**

<u>Có nhiều cách phát biểu nội dung định lý, dưới đây là một cách diễn đạt khác</u> :

> " Cho R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC. Khi đó, khoảng cách giữa hai tâm của hai đường tròn này là $\sqrt{R(R-2r)}$ "

Chứng minh.



_ Gọi là giao điểm của phân giác $\widehat{ABC}$ với (O).

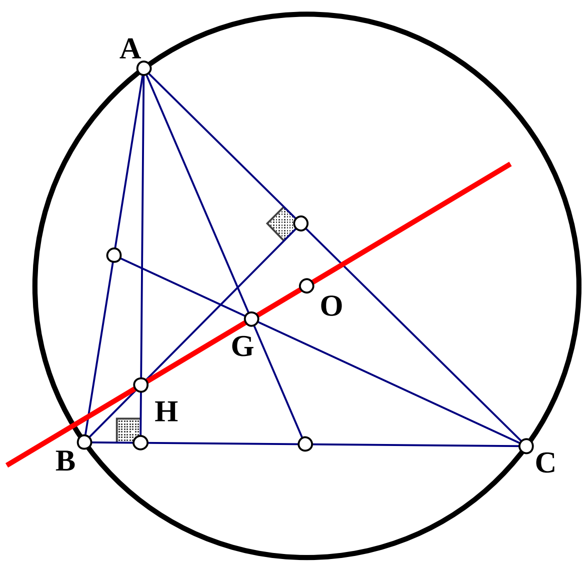
_ Ta có :

$$\begin{cases} BI.IM = R^2 - OI^2 = R^2 - d^2 \ (1) \\ \Delta ICM \text{ cân tại } M \text{ vì } \widehat{CIM} = \widehat{ICM} = \dfrac{\widehat{ABC} + \widehat{ACB}}{2} \\ \Delta MKC \backsim \Delta IBD \rightarrow \dfrac{MK}{MC} = \dfrac{IB}{ID} \\ MK = 2R \ ; \ ID = r \ ; \ MC = MI \end{cases}$$

_ Kết hợp các kết quả trên, ta có đpcm ! ■

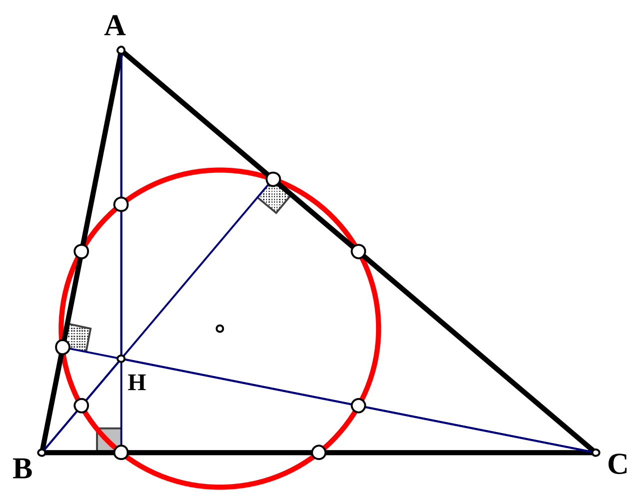
NÓI THÊM *"Đường thẳng Euler" – "Đường tròn Euler"*

Cho H, G, O lần lượt là trực tâm, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔABC. Khi đó : H, G, O thẳng hàng và HG = 2.OG



" Đường thẳng đi qua ba điểm H, G, O gọi là đường thẳng Euler "

Trong một tam giác : ba trung điểm của ba cạnh, ba chân đường cao và ba trung điểm của ba đoạn thẳng nối các đỉnh với trực tâm, nằm trên cùng một đường tròn.



" Đường tròn đi qua chín điểm như trên gọi là đường tròn Euler "

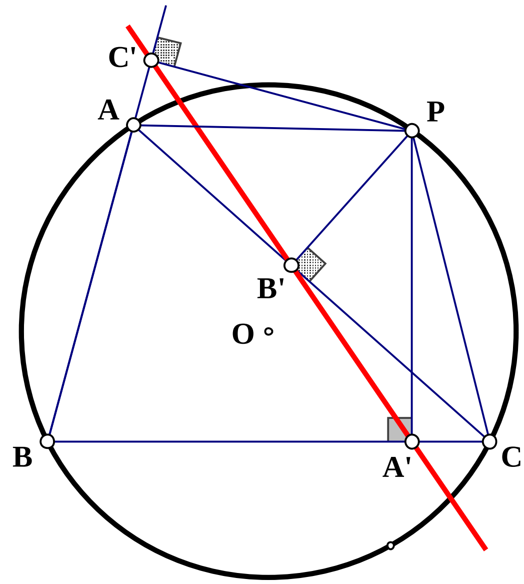
3- Định lý SIMSON (Robert Simson 1687-1768)

Ngoài định lý Menelaus , định lý Simson cũng còn hay được sử dụng để chứng minh ba điểm thẳng hàng.

Nội dung :

" Từ một điểm P trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC, ta hạ lần lượt các đường vuông góc xuống các cạnh BC, CA, AB chúng gặp các cạnh này lần lượt tại A', B', C'. Khi đó ba điểm A', B', C' thẳng hàng và đường thẳng chứa ba điểm này gọi là đường thẳng Simson "

Chứng minh.



_ Không mất tính tổng quát, giả sử P nằm trên cung (nhỏ) AC của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

_ Ta có $\widehat{APC} = \widehat{A'PC'}$ (cùng bù $\widehat{ABC}$)

Từ đây, suy ra được : $\widehat{APC'} = \widehat{A'PC}$. Như vậy trong hai điểm A', C' có một điểm nằm trên cạnh ΔABC và điểm kia nằm trên phần kéo dài của cạnh.

_ Ta lại có : $\widehat{A'B'C} = \widehat{A'PC}$ (A'B'PC nội tiếp)

Và $\widehat{AB'C'} = \widehat{APC'}$ (AB'PC' nội tiếp)

_ Kết hợp các kết quả trên, ta có : $\widehat{AB'C'} = \widehat{A'B'C}$

Do đó : A' , B' , C' thẳng hàng: *đpcm* ! ■

HẾT PHẦN I.

Tài liệu tham khảo :

_ Tuyển tập 30 năm tạp chí TH & TT – NBX Giáo dục 2000.

_ Diễn đàn Toán học (VMF)

_ Các định lý trong hình học phẳng qua các kỳ thi Olympic – TS. Nguyễn Văn Nho

_ Bài giảng " Điểm Toricelli và Định lý Carnot " – Trần Nam Dũng (PTNK)

_ Ẩn sau định lý Ptô-lê-mê – Lê Quốc Hán – NBX Giáo dục 2007.

_ Tuyển tập Những bài toán sơ cấp – NXB ĐH và THCN (1977).

Mọi góp ý gởi xin gởi về :

doanvanto71@yahoo.com *hoặc* doanvanto@gmail.com

Xem thêm tư liệu Toán trên thư viện :

http://violet.vn/vanto71

Xin trích dẫn câu nói của Thầy Ngô Đạt Tứ khi nói về Leonhard Euler :

" Đối với Euler, làm toán cũng tự nhiên và cần thiết như là hít thở không khí. Sống là lao động sáng tạo, sống là làm toán, và ông chỉ ngừng làm toán khi trái tim ông ngừng đập"

GV Đoàn Văn Tố

Tổ Toán – Trường THCS Hồng Bàng